2°/

a) $V_n - U_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$= 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right) = \frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)-1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} < 0$

Car : $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) > 0$ et $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) < 1$

On a : $X = \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Quand $n \to +\infty$ alors $X \to 0^+$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{2X}(\tan X - \sin X) = \lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\tan X}{X} - \frac{\sin X}{X}\right) = 0$

$\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0 \end{cases}$ alors (U_n) et (V_n) sont adjacents

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

$U_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2X}\sin X$ où $X = \frac{\pi}{2^{n+2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to0^+}\frac{\pi}{2}\frac{\sin X}{X} = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$

Solution 17 :

1°/ $0 < U_0 < V_0$ est vraie car : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$